EXAMEN FINAL PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

16 DE FEBRERO 2022

APELLIDO Y NOMBRE: **Nº LEGAJO:**

1		2		3		4		5		NOTA
a	b	a	B	a	b	a	b	a	b	

1.- Una empresa que fabrica bombas hidroneumáticas se preocupa por el nivel de ruido medio que producen las mismas, que debe ser inferior a 75 decibeles. Una muestra aleatoria de 36 mediciones del nivel de ruido tiene una media de 74 decibeles con una desviación estándar de 3.3 decibeles.

a) Plantee un test adecuado de nivel 0.05 para confirmar si el nivel de ruido medio producido por las bombas es inferior a 75 decibeles. ¿Qué decisión tomaría en este caso?

b) ¿Cuál es el p-valor de su conclusión?

2.- El número de fallas que presenta una máquina sigue un proceso de Poisson con intensidad de 3 por día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en 2 días se produzcan menos de 4 fallas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran más de 12 horas hasta que se produzca la primera falla?

3.- Se ha observado que un termómetro sometido a condiciones meteorológicas adversas da una medición entre 2 grados menos y 2 más de la temperatura real. El error cometido es una variable continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(2-x)}{8} & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el termómetro cometa un error entre -1 y 1 grado?

b) Halle el valor medio de la variable Y= 3X+5

4.- Modelo de regresión lineal

a) Explique la relación que existe entre el signo de la pendiente de la recta de regresión y el signo del coeficiente de correlación

b) Explique cómo debe interpretarse el valor del coeficiente de determinación

5.- Proporción muestral

a) Defina el estimador "proporción muestral" y demuestre que es un estimador insesgado del parámetro "p" de una variable aleatoria con distribución binomial.

b) ¿Cuál es la distribución de la proporción muestral? Justifique

Probabilidad y Estadística	Final	1/2
		16-2-22

1) Una empresa que fabrica bombas hidroneumáticas se preocupa por el nivel de ruido medio que producen las mismas, que debe ser inferior a 75 dbl. Una muestra aleatoria de 36 mediciones del nivel de ruido tiene una media de 74 decibeles con una desviación estándar de 3,3 decibeles.

a) Plantee un test adecuado de nivel 0,05 para confirmar si el nivel de ruido medio producido por las bombas es inferior a 75 dbl. ¿Qué decisión tomaría en este caso?

$\alpha = 0{,}05$

$n = 36$

$\bar{X} = 74$

$\sigma = 3{,}3$

usé σ y no S porque dice "desviación ESTANDAR"

$H_0: \mu = 75$ vs $H_1: \mu < 75$

$$e_m = \frac{\bar{X} - 75}{3{,}3/\sqrt{36}} \overset{a}{\sim} N(0,1) \text{ bajo } H_0$$

$$\boxed{e_m = \frac{(\bar{X} - 75)}{0{,}55}}$$

No indica cómo distribuye pero $n > 30 \Rightarrow$ distri aprox. Normal

Rechazo Ho si $Z_{obs} < z_{0,05}$

$$Z_{obs} = \frac{(74 - 75)}{0{,}55} = -1{,}\overline{81}$$

$z_{0,05} = -1{,}64485$

$Z_{obs} < z_{0,05}$

Rechazo Ho.

Hay evidencias para decir que el nivel de ruido disminuyó

b) ¿Cuál es el p-valor de su conclusión?

p-valor: $Z_{obs} = -1{,}\overline{81} \Rightarrow \boxed{p\text{-valor} = 0{,}03452}$

p-valor $< \alpha \Rightarrow$ Rechazo Ho ✓

② El número de fallas que presenta una máq. sigue un proceso Poisson con intensidad de 3 por día.

a) ¿Cuál es la prob. de que en 2 días se produzcan menos de 4 fallas?

X: "cant. de fallas que presenta una máq en 2 días"

$\boxed{\lambda = 3}$

$$X \sim Po(6)$$

app

$$P(X<4) = \boxed{P(X \leq 3) = 0{,}1512}$$

b) ¿Cuál es la prob. de que transcurran más de 12 horas hasta que se produzca la primera falla?

$\lambda = 3$

Y: "tiempo transcurrido hasta la primera falla" $\quad Y \sim Exp(3)$

12 horas $\Rightarrow Y = 0{,}5$

App

$$P(Y > 0{,}5) = 0{,}2231$$

③ Se ha observado que un termómetro sometido a cond. meteorológicas adversas da una medición entre 2 grados menos y 2 más de la temperatura real. El error cometido es una v.a. con función de densidad:

$$f(x) \begin{cases} \frac{2-x}{8} & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{e o c} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la prob. de que el termómetro cometa un error entre -1 y 1 grado?

$$P(-1 \leq x \leq 1) = \int_{-1}^{1} \frac{2-x}{8}\, dx = \frac{1}{8}\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = \boxed{0{,}5 = P(-1 \leq x \leq 1)}$$

b) Halle el valor medio de la variable $Y = 3X+5$

$$E(Y) = E(3X+5) = 3E(X) + 5 \underset{C.A.}{=} 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 5 = \boxed{3 = E(Y)}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_{-2}^{2} x \left(\frac{2-x}{8}\right) dx = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} 2x - x^2\, dx = \frac{1}{8} \cdot \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}$$

$$\boxed{E(X) = -\frac{2}{3}}$$

PyE - Final | **Final** | 2/2 | 16-2-22

4) Modelo de regresión lineal

a) Explique la relación que existe entre el signo de la pendiente de la recta de regresión y el signo del coeficiente de correlación

Los valores cercanos a 1 en el coef. de correlación indican que 'y' es creciente.

Los valores cercanos a -1 indican que 'y' es decreciente

tanto el signo de la pendiente de la recta de regresión y el del coef. de correlación, son iguales.

b) Indique cómo se debe interpretar el valor del coef. de determinación R^2

$0 \leq R^2 \leq 1$ valores cercanos al 0 : no hay relación lineal

" " al 1 : hay una relación perfecta

5) Proporción muestral

a) Defina el estimador "proporción muestral" y demuestre que es un estimador insesgado del parámetro "p" de una V.A. ~ Bi

Es un estimador que puede calcularse a partir de datos muestrales. Se calcula dividiendo "casos favorables" de la muestra dividido la cantidad de la muestra

Insesgado: quiero ver que $E(\hat{p}) = p \Rightarrow E(\hat{p}) - p = 0$

Estadístico muestral $\hat{p} = \frac{X}{n}$ $\qquad \underbrace{X \sim Bi(n,p)}_{E(X) = n \cdot p}$

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X) = \frac{1}{n} \cdot np = p$$

$$\boxed{E(\hat{p}) - p = 0} \checkmark$$

b) ¿Cuál es la distribución de la proporción muestral? Justifique

Sea $X_1, X_2 \dots X_n$ v.a.i.i.d $\sim Be(p)$, $n \geq 30$

$$\hat{p} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \rightarrow \times TCL \quad \hat{p} \overset{(a)}{\sim} N(0,1)$$

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \overset{(a)}{\sim} N(0,1)$$

aproximadamente Normal (0,1)